CHAPITRE 2

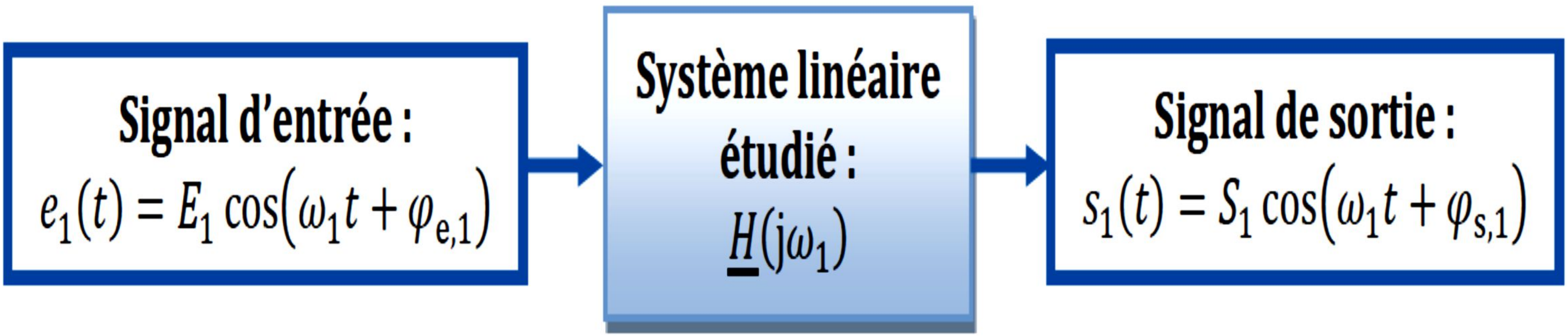
Filtrage linéaire d'un signal périodique

Dr N'CHO Janvier Sylvestre

Intérêt des systèmes linéaires

Principe (1)

On a vu qu'*en régime permanent* une entrée sinusoïdale donne au travers d'un système linéaire un signal de sortie lui-même sinusoïdal et *de même pulsation*. Par exemple pour le signal $e_1(t)$ de pulsation ω_1 on a :



Avec $\frac{S_1}{E_1} = \left|\underline{H}(j\omega_1)\right|$ et $\varphi_{s,1} = \arg \underline{H}(j\omega_1) + \varphi_{e,1}$

Principe (2)

De même pour un système *linéaire* la réponse à une somme de signaux d'entrée est la somme des réponses associées à chaque signal d'entrée considéré individuellement. Ainsi pour un signal d'entrée $e_1(t) + e_2(t)$ où $e_1(t)$ et $e_2(t)$ sont respectivement de pulsation ω_1 et ω_2, le signal de sortie s'écrit $s_1(t) + s_2(t)$:

$$s_1(t) + s_2(t) = S_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{s,1}) + S_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{s,2})$$

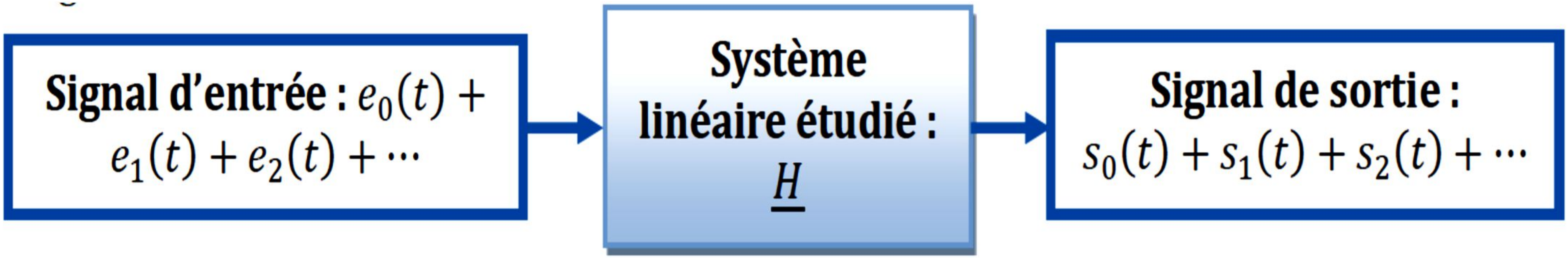
avec

$$\frac{S_1}{E_1} = \left|\underline{H}(\mathrm{j}\omega_1)\right|, \quad \frac{S_2}{E_2} = \left|\underline{H}(\mathrm{j}\omega_2)\right|, \ \varphi_{s,1} = \arg \underline{H}(\mathrm{j}\omega_1) + \varphi_{e,1}$$

et $\varphi_{s,2} = \arg \underline{H}(\mathrm{j}\omega_2) + \varphi_{e,2}$.

Principe (3)

Plus généralement en notant s_i la réponse du système à un signal d'entrée e_i on a le diagramme suivant :



C'est là que réside l'intérêt des signaux *sinusoïdaux* pour les systèmes *linéaires* : $e_0(t) + e_1(t) + e_2(t) + \cdots$ désignant la décomposition en série de Fourier d'un signal d'entrée simplement périodique, on peut connaître le signal de sortie $s_0(t) + s_1(t) + s_2(t) + \cdots$ en appliquant à chaque harmonique e_i l'opérateur $\underline{H}(j\omega_i)$ pour la pulsation ω_i de l'harmonique considérée.

Principe (4)

On résume cela dans le diagramme ci-dessous :

	Décomposition en série de Fourier			
$e(\mathrm{t}) =$	$E_0 +$	$E_1 \cos(\omega \times t + \varphi_{e_1}) +$	$E_2 \cos(2\omega \times t + \varphi_{e_2}) +$	...
	$\downarrow$ $\boxed{\underline{H}(\mathrm{j}0)}$ $\downarrow$	$\downarrow$ $\boxed{\underline{H}(\mathrm{j}\omega)}$ $\downarrow$	$\downarrow$ $\boxed{\underline{H}(\mathrm{j}2\omega)}$ $\downarrow$	
$s(t) =$	$S_0 +$	$S_1 \cos(\omega \times t + \varphi_{s_1}) +$	$S_2 \cos(2\omega \times t + \varphi_{s_2}) +$	...
	Synthèse de Fourier			

Avec pour $n > 0$:

$$S_n = |\underline{H}(jn\omega)| E_n \quad et \quad \varphi_{s_n} = \varphi_{e_n} + arg\, \underline{H}(jn\omega)$$

Principe (5)

Un système linéaire de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = G(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ est soumis à un signal d'entrée périodique $e(t)$. $e(t)$ peut être décomposé en série de Fourier :

$$e(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n(t)$$

Le signal de sortie $s_n(t)$ correspondant au signal d'entrée $e_n(t)$, harmonique de pulsation $n\omega$, est :

$$\boxed{\boldsymbol{s_n(t) = G(n\omega)c_n \cos\big(n\omega t + \varphi_n + \varphi(n\omega)\big)}}$$

Principe (6)

La linéarité du système permet d'en déduire le signal de sortie :

$$\boxed{\boldsymbol{s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n\omega)c_n \cos\left(n\omega t + \varphi_n + \varphi(n\omega)\right)}}$$

- ❑ Veiller à bien prendre la pulsation $n\omega$ pour l'harmonique d'ordre n .
- ❑ Ne pas oublier la composante continue correspondant à la pulsation nulle, le terme de phase pouvant introduire un changement de signe lorsque $\varphi(\omega = 0) = \pm\pi$

Principe (7)

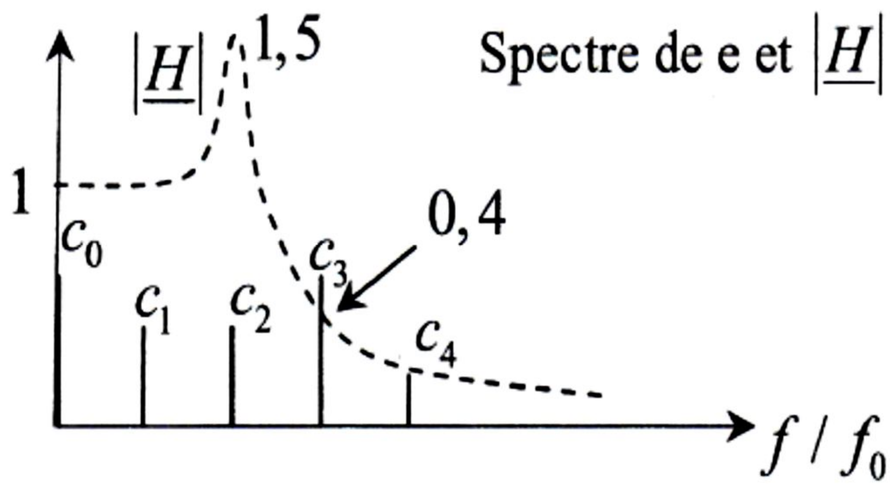
Réponse d'un filtre linéaire à un signal périodique

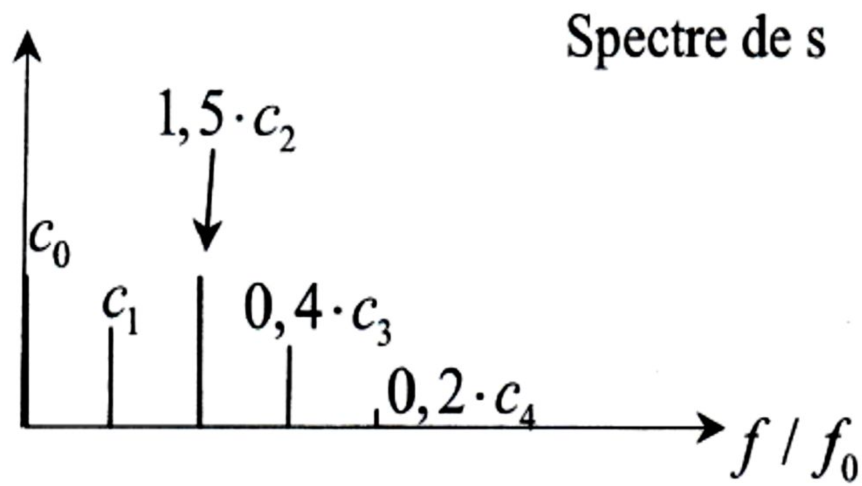
Si le filtre est linéaire, la fréquence de chaque harmonique est inchangée en sortie mais son amplitude et sa phase peuvent être modifiées.

Le signal de sortie correspond à l'addition des différents harmoniques transmis et modifiés par le filtre.

Principe (8)

Pour obtenir graphiquement le spectre en amplitude du signal, on superpose le spectre du signal d'entrée au tracé de $\left|\underline{H}(f)\right|$. Il ne reste qu' à multiplier la hauteur de chaque raie d'entrée de fréquence f par la valeur de $\left|\underline{H}(f)\right|$ à la même fréquence,





Principe (9)

<u>Remarque</u>

Pour un système linéaire, les raies du spectre du signal d'entrée se retrouvent dans le signal de sortie. Elles sont éventuellement coupées $\left(\left|\underline{H}(f)\right| = 0\right)$, atténuées si $\left(\left|\underline{H}(f)\right| < 1\right)$ ou amplifiées $\left(\left|\underline{H}(f)\right| > 1\right)$. **L'apparition de nouvelles fréquences dans le spectre du signal de sortie ne peut se produire que pour un système non linéaire.**

Principe (10)

Exercice d'application

On considère un filtre passe bas du premier ordre pour lequel le gain en régime continu est $H_0 = \frac{1}{2}$ et la pulsation de coupure à -3dB: $\omega_c = 10^3 rad.s^{-1}$.

1. Écrire sa fonction de transfert littéralement. Calculer numériquement sa fréquence de coupure.

2. On envoie un signal $e(t) = E + E\cos(\omega_c t) + E\cos(10\omega_c t)$ à l'entrée, avec $E = 1\,\text{V}$, dans ce filtre. Calculer $s(t)$ et représenter les spectres de e et s.

Principe (11)

Solution de l' exercice d'application

1. La fonction de transfert est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{j\omega}{\omega_c}}$$

On note $H(\omega) = \left|\underline{H}(j\omega)\right|$ le module de cette fonction de transfert et $\varphi(\omega)$ son argument :

$$H(\omega) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \qquad \varphi(\omega) = -\arctan\frac{\omega}{\omega_c}$$

La fréquence de coupure est alors $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} \approx 160$ Hz. À la pulsation de coupure $\varphi(\omega_c) = -\frac{\pi}{4}$. De même pour $\omega = 10\omega_c$: $\varphi(10\omega_c) = -\arctan 10 \approx -1{,}5$.

Principe (12)

2. Le signal d'entrée comporte trois composantes :

- la composante continue $e_0(t) = E$ d'amplitude E et de pulsation nulle ;
- le fondamental $e_1(t) = E\cos(\omega_c t)$ d'amplitude E et de pulsation $\omega = \omega_c$;
- un harmonique $e_2(t) = E\cos(10\omega_c t)$ d'amplitude E et de pulsation $\omega = 10\omega_c$.

On note s_0, s_1 et s_2 les réponses du filtre à e_1, e_2 et e_3.

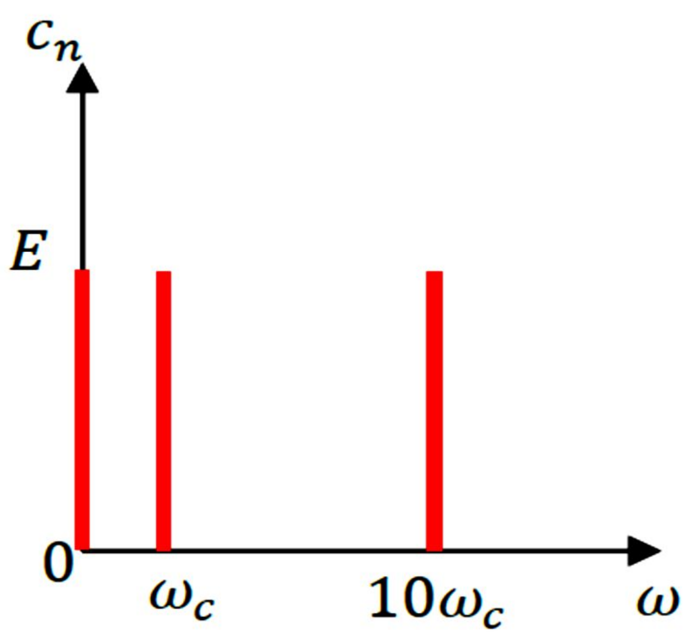
- $s_0(t) = |H(0)|E\cos(0 \times t + \varphi(0))$.
- $s_1(t) = |H(\omega_c)|E\cos\big(\omega_c \times t + \varphi(\omega_c)\big) = \frac{E}{2\sqrt{2}}\cos\left(\omega_c t - \frac{\pi}{4}\right)$.
- $s_2(t) = |H(10\omega_c)|E\cos\big(10\omega_c \times t + \varphi(10\omega_c)\big) \approx \frac{E}{20}\cos(10\omega_c t - 1{,}5)$.

Le système étant linéaire, le signal de sortie est :

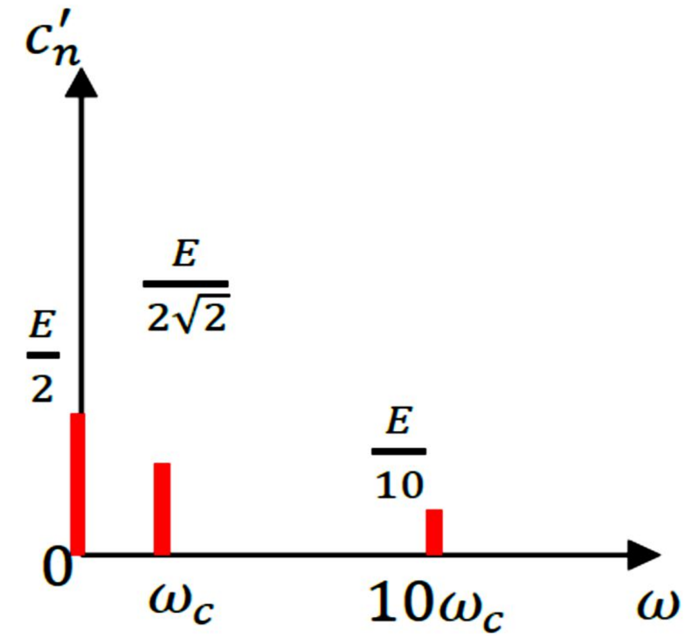
$$s(t) = s_0(t) + s_1(t) + s_2(t)$$
$$= \frac{E}{2} + \frac{E}{2\sqrt{2}}\cos\left(2\pi f_c t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{E}{20}\cos(10\omega_c t - 1{,}5)$$

Principe (13)

On a donc $c'_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{E}{2}$, $c'_1 = \frac{E}{2\sqrt{2}}$ et $c'_2 = \frac{E}{20}$.



Spectre de e



Spectre de s

Effet du filtrage sur un signal non harmonique

Introduction

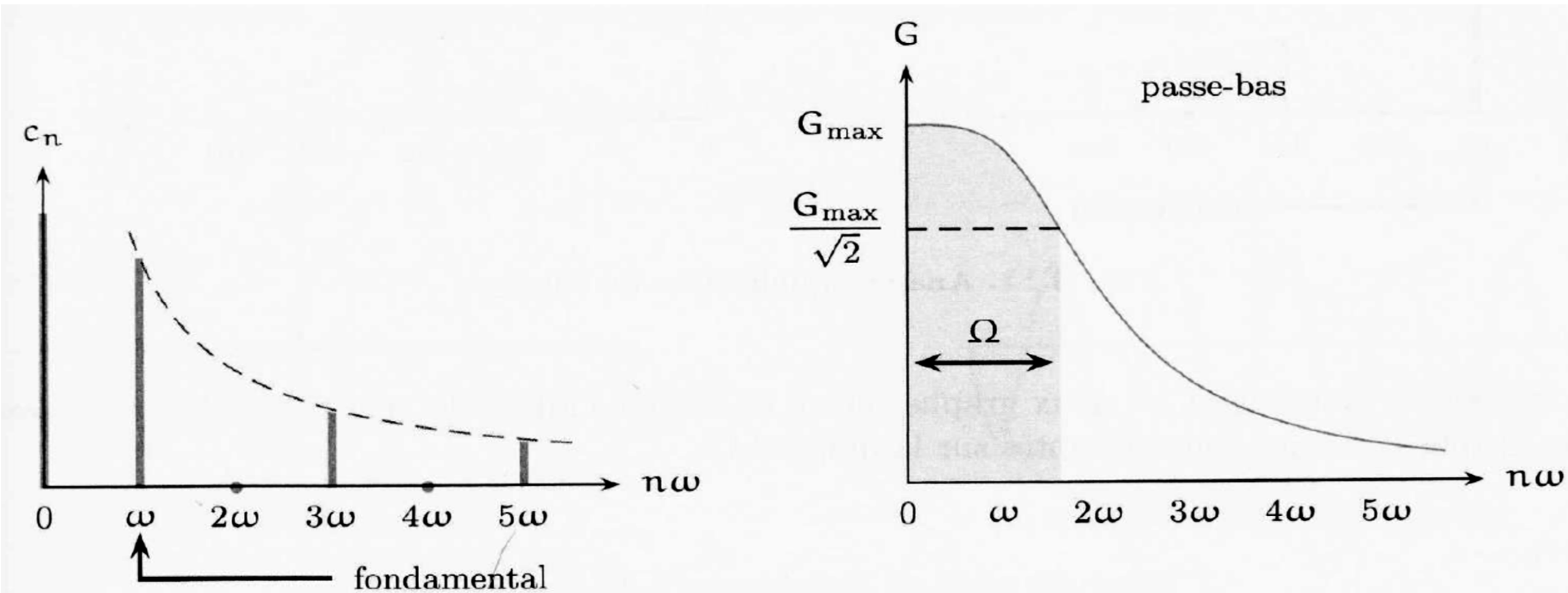
On s'intéresse à l'effet qualitatif d'un filtre sur les différentes composantes du signal d'entrée. Pour cela, il faut commencer par représenter le spectre simplifié du signal d'entrée, celui des c_n, et la courbe donnant le gain $G(\omega) = \left|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)\right|$. En superposant les deux graphes on peut alors *rapidement* analyser l'effet du filtre :

- si les harmoniques sont dans la bande passante, on considère qu'ils sont transmis par le dispositif ;
- s'ils sont en dehors de la bande passante on considère que le filtre les élimine.

Cette approche est certes assez approximative, mais elle permet de comprendre sans trop de calcul l'effet d'un filtrage.

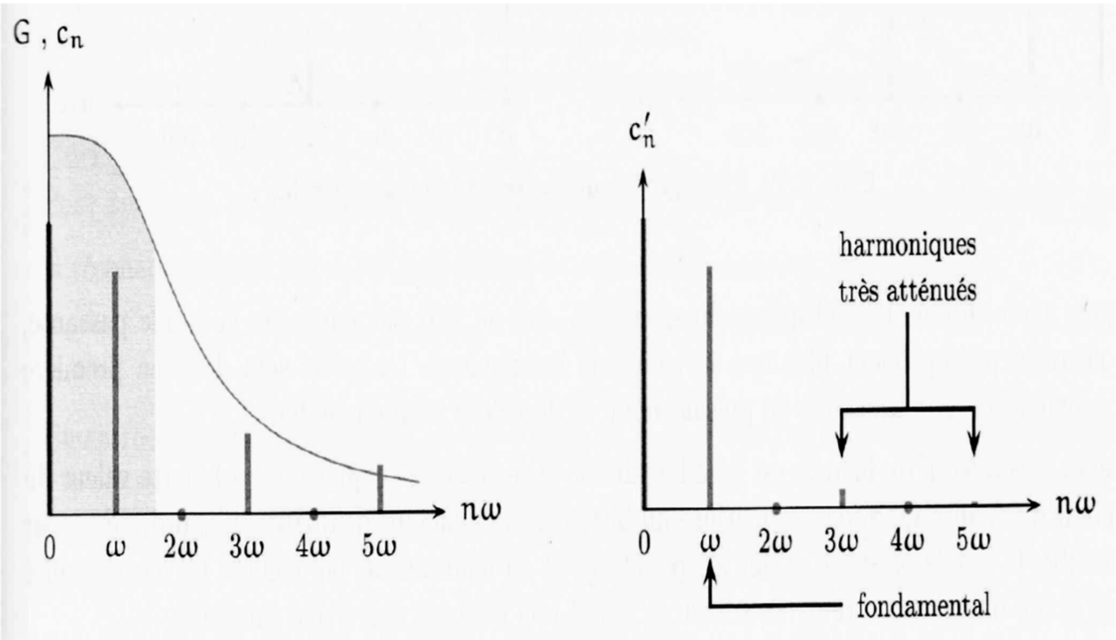
Filtrage d'un créneau par un passe-bas (1)

La figure suivante présente le principe sur l'exemple du filtrage d'un signal en créneau de valeur moyenne non nulle par un filtre passe-bas du premier ordre, de pulsation propre $\omega_0 = 1{,}6\omega$.



Filtrage d'un créneau par un passe-bas (2)

On superpose maintenant les deux graphes et on en déduit l'allure du spectre c'_n de sortie :



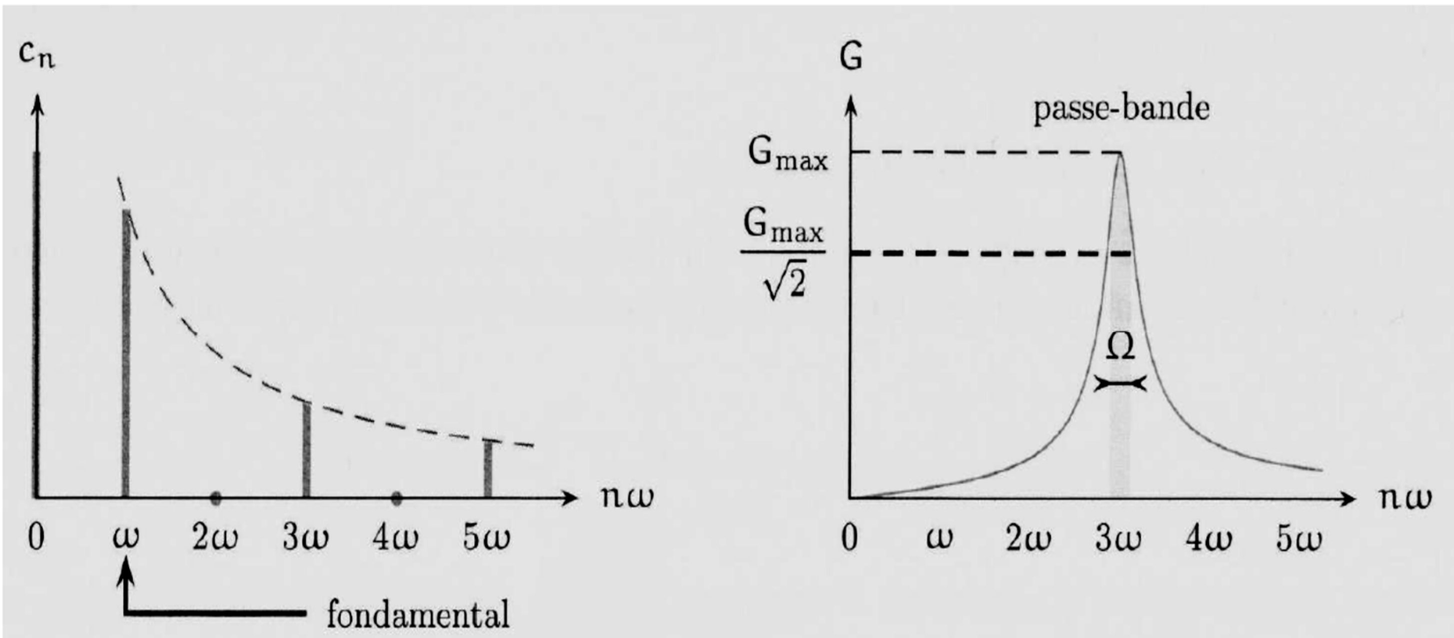
Après élimination des pulsations du spectre qui ne font pas partie de la bande passante, on constate qu'il ne reste plus que la composante continue et le premier harmonique ; les amplitudes des autres pulsations étant fortement atténuées, on peut faire l'approximation de les négliger.

La sortie sera donc *en première approximation* la somme d'un terme constant et d'une sinusoïde de pulsation ω, c'est-à-dire de la forme

$$s(t) \approx c'_0 + c'_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$

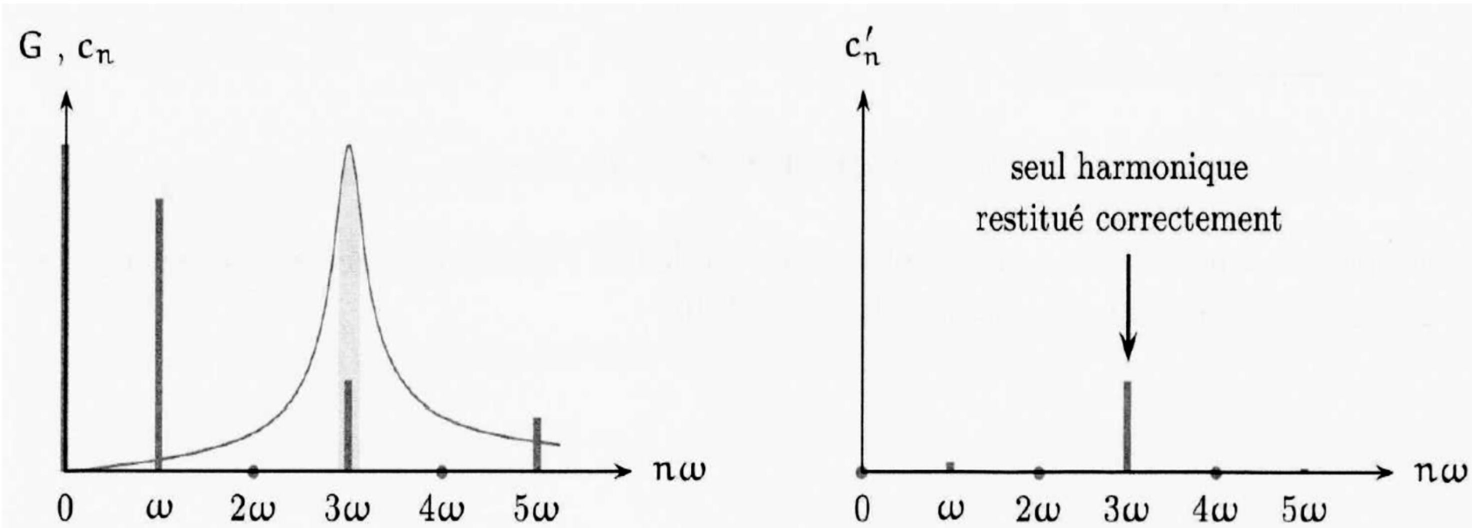
Filtrage d'un créneau par un passe-bande (1)

La figure suivante présente le principe sur l'exemple du filtrage d'un signal en créneau de valeur moyenne non nulle par un filtre passe-bande très sélectif, de pulsation propre $\omega_0 = 3\omega$.



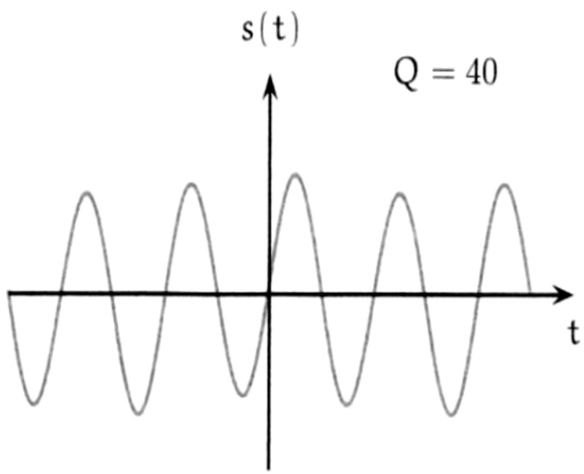
Filtrage d'un créneau par un passe-bande (2)

On superpose maintenant les deux graphes et on en déduit l'allure du spectre c'_n de sortie :

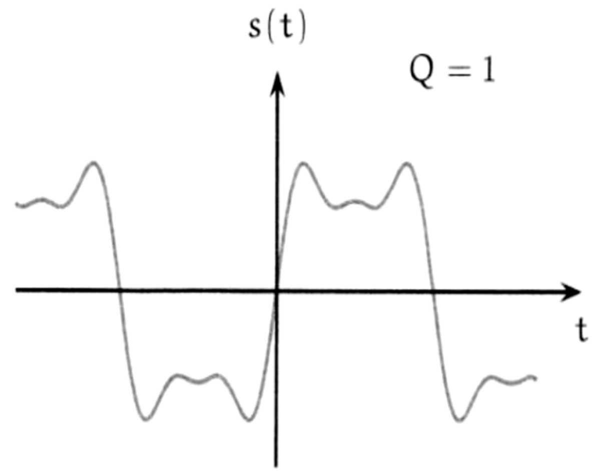


Après avoir éliminé les pulsations du spectre qui ne font pas partie de la bande passante, il ne reste pratiquement plus que le troisième harmonique. La sortie sera donc en première approximation une sinusoïde de pulsation 3ω et de valeur moyenne nulle.

Filtrage d'un créneau par un passe-bande (3)



le filtrage isole l'harmonique 3ω



le filtrage n'est pas assez sélectif

L'effet très sélectif du filtrage est lié à l'acuité de la résonance, ce qui est dû à la forte valeur du facteur de qualité Q. Si on avait utilisé un filtre de faible facteur de qualité, de l'ordre de 1 par exemple, la bande passante aurait été plus large et on n'aurait pas pu négliger les harmoniques à ω et 5ω dans le spectre c_n' de sortie ; le signal $s(t)$ n'aurait rien d'une sinusoïde.

Filtrage d'un créneau par un passe-bande (4)

On pourra retenir l'importance du choix des paramètres d'un filtre en fonction de l'usage que l'on veut en faire : pour isoler l'harmonique à 3ω du signal créneau, il faut non seulement que la résonance se fasse à $\omega_0 = 3\omega$ mais encore que le facteur de qualité Q soit suffisamment élevé pour éliminer les harmoniques voisins.

Test de linéarité

Le critère de linéarité nous indique qu'un **système est linéaire si sa réponse harmonique est harmonique**.